Автоматика и телемеханика, № 10, 2024

© 2024 г. И.Б. ЯДЫКИН, д-р техн. наук (Jad@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ ГРАМИАНОВ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МЕТРИК НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Разработаны новые алгоритмы поэлементного вычисления матриц прямых и обратных грамианов для устойчивых непрерывных линейных MIMO LTI систем на основе спектральных разложений грамианов в форме произведений Адамара. Показано, что матрицы мультипликаторов в произведении Адамара являются инвариантами при различных канонических преобразованиях линейных непрерывных систем. Получены также спектральные разложения обратных матриц грамианов непрерывных динамических систем по спектрам самих матриц грамианов и исходных матриц динамики. Исследованы свойства матриц мультипликаторов в спектральных разложениях грамианов. С помощью этих результатов получены спектральные разложения следующих энергетических метрик: объемов эллипсоидов притяжения, следов матрицы прямого и обратного грамианов управляемости, входной и выходной энергии системы индексов центральности энергетических метрик управляемости, средней минимальной энергии. Даны рекомендации по использованию полученных результатов.

Ключевые слова: спектральные разложения, непрерывные динамические системы, грамианы, уравнения Ляпунова и Сильвестра, матрицы мультипликаторов, произведение Адамара.

DOI: 10.31857/S0005231024100075, **EDN:** YUOTDD

1. Введение

Матрицы грамианов являются решениями уравнений Ляпунова и Сильвестра специального вида, которые в настоящее время достаточно хорошо изучены [1–7]. Хотя теория управления предлагает математические инструменты для управления техническими и природными системами, научные основы управления сложными кибер-физическими системами еще недостаточно разработаны. В работе [8] предложены аналитические инструменты для изучения управляемости произвольной сложной направленной сети на основе оптимального выбора управляющих узлов сети, которые могут эффективно управлять всей динамикой системы. Применение этих инструментов к реальным сетям обнаружило, что количество управляющих узлов определяется в основном распределением узлов сети. Теория управления является математически продвинутой отраслью техники, имеющей многочисленные приложения к электрическим системам, производственным процессам, системам связи, самолетам, космическим аппаратам. Однако фундаментальные вопросы, касающиеся управляемости сложных систем, возникающие в природе и технике, до сих пор не решены в полной мере. Используя метрику управляемости, определяемую долей эффективно управляющих узлов сети в их минимальном наборе, необходимом для полной управляемости, в [9] показано, что разреженные неоднородные сети обладают плохой управляемостью, в то время как плотные однородные сети по сравнению с ними обладают лучшей управляемостью. Преобразование уравнений состояния в канонические формы управляемости и наблюдаемости позволяет упростить решение уравнений Ляпунова и исследовать структурные свойства управляемости и наблюдаемости [9–12]. Важная задача оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств на основе различных энергетических функционалов, в том числе инвариантных эллипсоидов, рассматривалась в [13–16]. В [10] сформулирован общий подход к решению задачи оптимального размещения датчиков и исполнительных механизмов для многосвязных систем управления, который основан на декомпозиции системы на устойчивую и неустойчивую подсистемы. Степень управляемости системы определяется на основе энергетических метрик, основанных на использовании конечных и бесконечных грамианов управляемости. Предложен общий метод вычисления обратного грамиана управляемости для уравнений состояния, заданных в канонических формах управляемости. В [13] предложен метод оптимального размещения виртуальной инерции на графе энергетической системы, основанный на использовании энергетических метрик когерентности генераторов и квадрата H_2-нормы оператора системы, заданной стандартной динамической моделью в пространстве состояний. Проблема формализована как задача невыпуклой оптимизации с ограничениями в виде значений грамианов наблюдаемости. Хорошо известно, что задачи управления с минимальной энергией также решаются с использованием грамианов. За последние годы эти подходы были развиты для сложных энергетических, социальных, транспортных и биологических сетей в [17–21]. В [19] показано, что во многих случаях, чем ближе собственные числа матрицы динамики к мнимой оси, тем меньше энергии требуется для обеспечения полной управляемости сети. Таким образом, степень управляемости (достижимости) сети связана с минимальной энергией, что позволяет ввести в рассмотрение новые метрики в виде минимального собственного числа грамиана управляемости и максимального числа его обратного грамиана, а также следов этих грамианов. В электроэнергетике вставки постоянного тока используются для демпфирования опасных низкочастотных колебаний. Использование метода грамианов для оптимального размещения вставок постоянного тока в полномасштабной модели электроэнергетической системы Европы позволило успешно решить проблему глобальной оптимизации размещения вставок постоянного тока на графе модели системы.

2. Постановка задачи

В дальнейшем будем рассматривать ориентированный граф G, образованный множеством узлов E и множеством ребер Q. Хорошо известно, что для описания модели графа можно использовать линейную динамическую модель графа со стандартным описанием в виде (A, B, C) представления в пространстве состояний. В качестве такой модели рассмотрим устойчивую непрерывную стационарную MIMO LTI линейную стационарную непрерывную динамическую систему с многими входами и многими выходами вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(0) = 0, \tag{2.1}$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$.

Большие динамические сети можно описать уравнениями вида (1), в которых A – матрица Лапласиана, B – матрица управляющих входов, C – матрица измеряемых выходов, причем порядок матрицы динамики графа является достаточно большим положительным числом [19]. Уравнение Ляпунова для вычисления грамиана управляемости системы (2.1) имеет вид

$$AP^c + P^c A^{\mathrm{T}} = -BB^{\mathrm{T}}. \tag{2.2}$$

Каждый исполнительный механизм в реальной системе ограничен по энергии управления, поэтому важный класс метрик управляемости имеет дело с количеством входной энергии, необходимой для достижения заданного состояния из исходного состояния. В частности, можем поставить следующую задачу оптимального управления с минимальной энергией, которая приведет систему из исходного состояния в конечное состояние x_f в момент времени t [10]:

$$\underset{u(t)\in\mathcal{L}_2}{minimize} \int\limits_0^{\mathrm{T}} \|u\,(\tau)\|^2 d\tau, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \dot{x}\,(t) = Ax\,(t) + Bu\,(t)\,, \\ x\,(0) = 0, \;\; x\,(t) = x_f. \end{gathered}$$

Для получения решения могут быть использованы стандартные методы теории оптимального управления. Если система управляема, то оптимальный вход $u(\tau)^*$ имеет вид

$$u(\tau)^* = B^{\mathrm{T}} e^{A^{\mathrm{T}}(\tau - t)} \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} e^{A\sigma} BB^{\mathrm{T}} e^{A^{\mathrm{T}}} d\sigma \right)^{-1} x_f, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t.$$

Оптимальный минимум энергии по входу равен

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} \|u\,(\tau)\|^2 d\tau = x_f^{\mathrm{T}} \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} e^{A\sigma} BB^{\mathrm{T}} e^{A^{\mathrm{T}}} d\sigma \right)^{-1} x_f. \tag{2.4}$$

Средняя минимальная энергия определяется выражением [19]

$$E_{avmin} = \frac{1}{n}\operatorname{tr} P_c^{-1} = \frac{\int\limits_{\|x\|=1} x^{\mathrm{T}} P_c(t) x dx}{\int\limits_{\|x\|=1} dx}.$$

Матрица

$$P_c\left(t\right) = \int\limits_0^{\mathrm{T}} e^{A\sigma} B B^{\mathrm{T}} e^{A^{\mathrm{T}}} d\sigma \tag{2.5}$$

называется конечным грамианом управляемости в момент времени t. Грамиан управляемости $P_c\left(t\right)$ в большинстве случаев является положительной полуопределенной матрицей. Он определяет эллипсоид в пространстве состояний

$$\mathcal{E}_{\min} = \left\{ x \in R^n \left| x^{\mathrm{T}} P_c\left(t\right)^{-1} x \leqslant 1 \right. \right\},$$

который содержит множество состояний, достижимых за t секунд. Собственные векторы и соответствующие собственные значения матрицы $P_c\left(t\right)^{-1}$ определяют длины соответствующих полуосей эллипсоида [6].

Определение 1. *Назовем матрицей Сяо псевдоганкелеву квадратную матрицу, имеющую структуру нулевого пледа вида* [9]

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_3 & 0 \\ -y_2 & 0 & y_3 & 0 & \dots \\ 0 & -y_3 & 0 & \dots & 0 \\ y_3 & 0 & \dots & 0 & y_n \end{bmatrix}, \qquad y_i \in \mathsf{C}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Элементы матрицы вычисляются по формулам

$$y_{j\eta} = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \;\; j+\eta = 2k+1, \qquad k = 1, 2 \dots, n; \\ (-1)^{\frac{j-\eta}{2}} \boldsymbol{y_n}, \quad \text{если} \;\; j+\eta = 2k, \qquad k = 1, 2 \dots, n. \end{cases}$$

Рассмотрим важный частный случай непрерывных линейных стационарных SISO (с одним входом и одним выходом) LTI систем, представленных уравнениями состояния в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В этом случае грамианы управляемости и наблюдаемости определяются формулами [20]

$$P^{cF} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^{\eta}}{\dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} 1_{j+1\eta+1}, \tag{2.6}$$

$$P^{oF} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^{\eta}}{\dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} 1_{j+1\eta+1}, \tag{2.7}$$

где $N\left(s\right)$ – характеристический полином системы.

Представление грамианов в форме Адамара согласно формулам (2.6)–(2.7) принимает вид

$$P^{cF} = \Omega_{cF} \circ \Psi_c, \quad \Psi_c = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1_{j+1\eta+1},$$

$$P^{oF} = \Omega_{oF} \circ \Psi_o, \quad \Psi_o = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1_{j+1\eta+1.}$$

Отсюда вытекают тождества

$$P^{cF} \equiv \Omega_{cF} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} 1_{j+1\eta+1}, \tag{2.8}$$

$$P^{oF} \equiv \Omega_{oF} = \Omega_{cF}.$$

Матрицы Ω_{cF}, Ω_{oF} являются матрицами Сяо [20]. Запишем их в форме

$$\Omega_{cF} = \omega(n, s_k, j, \eta)\, 1_{j+1\eta+1},$$

$$\omega(n, s_k, j, \eta) = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)}, \quad j, \eta = \overline{0, n-1}.$$

Заметим, что $j+1, \eta+1$ являются номерами строк и столбцов матрицы Сяо. Функция $\omega(n, s_k, j, \eta)$ является скалярным мультипликатором и инвариантом при различных преобразованиях подобия [7]. Рассмотрим далее динамическую сеть, описываемую уравнениями состояния графа вида (2.1) и определим матрицу V в виде

$$V = \left[\ e_1 \ \ \dots e_i \dots \ \ e_n\ \right],$$

где e_i – единичный вектор в R^n, i – номер узла графа. Следуя [21], определим индекс центральности энергетической метрики управляемости узла графа в форме

$$J_{CE_i} = \operatorname{tr}(P_{ci}),$$

где P_{ci} – бесконечный грамиан управляемости узла графа, определяемый в виде решений следующих модальных уравнений Ляпунова

$$AP_{ci} + P_{ci}A^{\mathrm{T}} = -e_i e_i^{\mathrm{T}}.$$

Вследствие линейности уравнений Ляпунова справедливо равенство

$$J_{CE} = \sum_{i=1}^{n} J_{CE_i}.$$

Это уравнение определяет индекс центральности энергетических метрик графа. Обобщая эти результаты для случая непрерывных MIMO LTI систем, можно ввести аналогичный индекс центральности энергетических метрик управляемости отдельных мод этих систем для случая устойчивых полностью управляемых и наблюдаемых систем с простым спектром матрицы динамики

$$J_{CE_i} = \mathrm{tr}\,(P_{ci}),$$

где i – номер отдельного собственного числа матрицы динамики. Обоснование подобного подхода состоит в том, что любая линейная непрерывных MIMO LTI систем может быть представлена в виде графа, узлы которого соответствуют отдельным собственным числам. Как показано в [10] справедлива формула

$$P_{ci} = e_i \left(\int\limits_0^\infty e^{A\sigma} B B^{\mathrm{T}} e^{A^*\sigma} d\sigma \right) e_i^{\mathrm{T}} = e_i Q\,(0,\infty)\, e_i^{\mathrm{T}},$$

где $Q\,(0,\infty)$ – бесконечный грамиан управляемости.

В [10] показано, что матрица $Q\,(0,\infty)$ является матрицей Сяо, которая при сделанных в ней предположениях является инвариантом при любых невырожденных преобразованиях координат и положительно-определенной матрицей. Заметим, что грамианы управляемости играют центральную роль при формировании инвариантных эллипсоидов притяжения. Рассмотрим далее цели исследования для решения некоторых задач оценивания состояния и управления. Первой целью статьи будет получение спектральных разложений обратных матриц грамианов непрерывных динамических систем по спектрам самих обратных матриц и исходных матриц динамики. Другой целью настоящей статьи является получение спектральных разложений следующих энергетических метрик [6, 8–19]:

1. Объема эллипсоидов притяжения $Vol\epsilon_x, Vol\epsilon_y$. Эта метрика характеризует объем подмножества пространства состояний, достижимого из начала координат при фиксированном количестве энергии управления, являющейся функцией определителя грамиана управляемости.

2. Следов матрицы грамиана управляемости $\mathrm{tr}\, P_c$. Эта метрика характеризует меру энергии, которая обратно пропорциональна средней энергии, необходимой для управления системой в различных направлениях пространства состояний.

3. Следов обратной матрицы грамиана управляемости $\mathrm{tr}\, {P_c}^{-1}$. Эта метрика характеризует меру энергии, которая пропорциональна средней энергии, необходимой для управления системой в различных направлениях пространства состояний.

4. Входной и выходной энергии системы $E_{in},\ E_{out}$.

5. Индексов центральности энергетических метрик управляемости системы отдельных мод непрерывных многосвязных стационарных систем J_{CE}, J_{CE_i}.

6. Средней минимальной энергии E_{avmin}.

3. Сепарабельные спектральные разложения инверсных грамианов непрерывных MIMO LTI систем в форме обобщенных матриц Сяо

Следующие два метода определения спектральных разложений обратной матрицы грамианов управляемости будут предложены ниже.

Первый метод. Сепарабельные спектральные разложения инверсных грамианов непрерывных MIMO LTI систем (2.1) основаны на разложении резольвенты матрицы грамиана управляемости в ряд Фаддеева–Леверье и вычислении нулевого члена этого разложения. Разложение резольвенты имеет вид [22, 23]

$$(Is - P_c)^{-1} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} R_{j+1} s^j}{N(s)}. \tag{3.1}$$

Примем $N(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots p_1 s + p_0,\ \ j = 1, 2, \dots, n$. Обозначим через λ_k корни характеристического уравнения. Матрицы Фаддеева R_j и коэффициенты характеристического уравнения грамиана определяют с помощью следующего алгоритма

«1-й» шаг: $p_n = 1,\ R_n = I,\ R_i = \sum\limits_{j=i}^{n} p_j P_c^{j-i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

. . . .

«k-й» шаг: $p_{n-k} = -\frac{1}{k}\operatorname{tr}(P_c R_{n-k+1}),\ R_{n-k} = p_{n-k} I + P_c R_{n-k+1},\ k = 1, 2, \dots, n.$

. . . .

«n-й» шаг: $p_0 = -\frac{1}{n}\operatorname{tr}\ (P_c R_1)\,,\ R_0 = p_0 I + P_c R_1 = 0.$

Положив $s = 0$ получим [24]

$$P_c^{-1} = -p_0^{-1} R_1 = p_0^{-1} - p_1 I - p_2 P_c - \dots - P_c^{n-1}. \tag{3.2}$$

Таким образом, с помощью спектрального разложения резольвенты матрицы грамиана управляемости получена формула вычисления обратной матрицы грамиана. Заметим, что при этом не только вычислена обратная матрица грамиана, но и все коэффициенты характеристического полинома грамиана, что позволяет вычислить все собственные числа матрицы грамиана. Кроме того, для простого спектра матрицы грамиана получим формулу, представляющую спектральное разложение обратного грамиана по спектру матрицы грамиана

$$P_c^{-1} = \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} P_{c,j} \sigma_\lambda^j}{\dot{N}_c(\sigma_\lambda)} \frac{1}{\sigma_\lambda},$$

где P_c – матрица грамиана управляемости, $P_{c,j}$ – матрица Фаддеева в разложении резольвенты грамиана, σ_λ – собственное число матрицы грамиана P_c.

Второй метод. Из (3.2) видно, что обратную матрицу образует сумма неотрицательных степеней грамиана. Из этого наблюдения вытекает следующий результат.

Лемма 1. Рассмотрим устойчивую непрерывную стационарную линейную динамическую систему MIMO LTI с простым спектром с многими входами и многими выходами в виде (2.1). *Предположим, что система* (2.1) *устойчива, матрицы* A, BB^{T} *являются вещественными, матрица* A *имеет простой спектр, собственные числа* s_k, s_ρ *различны. Грамиан управляемости имеет в соответствии с* [24] *структуру матрицы Сяо для четных* n *в виде*

$$P_c = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & -p_{22} & \dots & 0 \\ 0 & p_{22} & \dots & 0 & \dots \\ -p_{22} & \dots & \dots & \dots & -p_{n-1n-1} \\ \dots & 0 & \dots & p_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \dots & -p_{n-1n-1} & 0 & p_{nn} \end{bmatrix},$$

для нечетных n *в виде*

$$P_c = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & -p_{22} & \dots & p_{\frac{n+1}{2}\frac{n+1}{2}} \\ 0 & p_{22} & \dots & -p_{\frac{n+1}{2}\frac{n+1}{2}} & \dots \\ -p_{22} & \dots & \dots & \dots & -p_{n-1n-1} \\ \dots & -p_{\frac{n+1}{2}\frac{n+1}{2}} & \dots & p_{n-1n-1} & 0 \\ p_{\frac{n+1}{2}\frac{n+1}{2}} & \dots & -p_{n-1n-1} & 0 & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда обратная матрица грамиана управляемости имеет вид для четных n

$$P_c^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{11} & 0 & \tilde{p}_{13} & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{p}_{22} & \dots & 0 & \dots \\ \tilde{p}_{31} & \dots & \dots & \dots & \tilde{p}_{n-2n} \\ \dots & 0 & \dots & \tilde{p}_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \tilde{p}_{nn-2} & 0 & \tilde{p}_{nn} \end{bmatrix},$$

для нечетных n

$$P_c^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{11} & 0 & \tilde{p}_{13} & \dots & \tilde{p}_{1n} \\ 0 & \tilde{p}_{22} & \dots & \tilde{p}_{2n-1} & \dots \\ \tilde{p}_{31} & \dots & \dots & \dots & \tilde{p}_{n-2n} \\ \dots & \tilde{p}_{n-12} & \dots & \tilde{p}_{n-1n-1} & 0 \\ \tilde{p}_{n1} & \dots & \tilde{p}_{nn-2} & 0 & \tilde{p}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Назовем подобную структуру структурой обобщенной матрицей Сяо, которая наследует от матрицы Сяо (наличие нуля в тех элементах, где сумма строки и столбца нечетна).

Доказательство. В соответствии с (3.1) структура матрицы $(P_c)^{-1}$ совпадает со структурой матрицы Фаддеева R_1. Последняя представляет собой линейную комбинацию неотрицательных степеней матрицы P_c, которая представляет собой сумму мультипликаторов с нулевым пледом [11]. Прямой проверкой можно убедиться в том, что любая положительная степень "k" матрицы P_c не меняет структуру мультипликатора. Добавление к такой структуре диагональной матрицы $p_0^{-1}p_1 I$ не меняет структуру матрицы мультипликатора. В доказанной лемме ничего не говорится о вычислении элементов матрицы $(P_c)^{-1}$. Эту задачу можно решить путем сведения задачи вычисления обратной матрицы к совокупности решений n линейных систем алгебраических уравнений с одинаковой матрицей левой части.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы. Тогда элементы матрицы обратного грамиана можно вычислить путем решения системы линейных алгебраических уравнений СЛАУ вида

$$P_c X = I, \tag{3.3}$$

где матрица P_c является обобщенной матрицей Сяо. Система (3.3) *сводится к решению n систем линейных алгебраических уравнений СЛАУ вида*

$$P_c x_i = e_i, \tag{3.4}$$

где x_i – столбец "i" матрицы X, а e_i – единичный вектор.

Таким образом, описанный метод можно назвать гибридным, поскольку он сочетает разложение резольвенты матрицы грамиана управляемости в ряд Фаддеева–Леверье и метод СЛАУ. Для систем невысокой размерности он позволяет получить следующие расчетные формулы для вычисления элементов обратной матрицы грамиана в форме Сяо.

Иллюстративный пример

Приведем решения СЛАУ (3.3) для систем невысокой размерности

$\boldsymbol{n = 1}$.

$$x_{11} = (p_{11})^{-1}.$$

$\boldsymbol{n = 2}$.

$$x_{11} = (p_{11})^{-1}, \ \ x_{22} = (p_{22})^{-1}.$$

$\boldsymbol{n = 3}$.

$$x_{11} = p_{33}\left(p_{11}p_{33} - p_{22}^2\right)^{-1}, \ \ x_{31} = p_{22}\left(p_{11}p_{33} - p_{22}^2\right)^{-1},$$
$$x_{22} = (p_{22})^{-1}.$$
$$x_{13} = p_{22}\left(p_{11}p_{33} - p_{22}^2\right)^{-1}, \ \ x_{33} = p_{11}\left(p_{11}p_{33} - p_{22}^2\right)^{-1},$$

$\boldsymbol{n = 4}$.

$$x_{11} = p_{33}\left(p_{11}p_{33} - p_{22}^2\right)^{-1}, \ \ x_{31} = p_{22}\left(p_{11}p_{33} - p_{33}^2\right)^{-1}$$
$$x_{24} = x_{42} = p_{33}\left(p_{22}p_{44} - p_{22}^2\right)^{-1}.$$

4. Свойства матриц Сяо

Л е м м а 2 [25]. *Рассмотрим устойчивую непрерывную стационарную линейную динамическую систему MIMO LTI с простым спектром с многими входами и многими выходами в виде (2.1). Предположим, что система (2.1) устойчива, полностью управляема и наблюдаема, представлена в канонической форме управляемости, матрицы A, BB^{T} являются вещественными, матрица A имеет простой спектр, а ее собственные числа s_k, s_ρ различны.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Матрица P_c мультипликатора в разложении Адамара грамиана управляемости является решением уравнения Ляпунова вида*

$$AP_c + P_cA^{\mathrm{T}} = -I.$$

Эта матрица является матрицей Сяо и нормальной матрицей.

2. *Матрица мультипликатора в разложении Адамара субграмиана управляемости P_{ci} является решением модального уравнения Ляпунова вида*

$$AP_{ci} + P_{ci}A^{\mathrm{T}} = -I_{ii}.$$

3. *Диагональные члены матриц мультипликатора являются положительными числами, определяемыми выражениями вида*

$$p_{cii} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k - s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda=k}^{n}(-s_k - s_\lambda)}(-1)^{i-1}s_k^{2(i-1)} > 0, \qquad i = \overline{1,n}.$$

4. *Диагональные члены матриц субграмианов управляемости в форме матриц Сяо образуют комплексные или вещественные геометрические прогрессии в виде*

$$p_{c11i} = p_{c11i-1}q_i,$$

где начальный член $p_{c11i} = \frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k-s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda=k}^{n}(-s_k-s_\lambda)}$, *знаменатель* $q_i = -s_i^2$, $i = \overline{1,n}$.

5. *След матрицы Сяо является положительным числом, которое представляет собой сумму прогрессий, образуемых диагональными членами матриц субграмианов управляемости*

$$\operatorname{tr} P_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k - s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda=k}^{n}(-s_k - s_\lambda)}\frac{\left(s_i^2\right)^{i-1} - 1}{(-s_i^2 - 1)} > 0. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения 1 следует из разложении Адамара грамиана управляемости P_c вида (2.8). В [24, 25] доказано, что это решение единственно и является матрицей Сяо. Из [24] (Теорема 2, следствие 3) следует, что матрица мультипликатора Ω в разложении Адамара грамиана управляемости P_c имеет вид

$$P(t) = \Omega(t) \circ \Psi, \quad \Omega = \omega(n, s_k, -s_k, i, j) 1_{n \times n}, \quad 1_{n \times n} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\eta=1}^{n} e_j e_\eta^T,$$

что доказывает первую часть утверждения 1 леммы. С другой стороны матрица Сяо симметрична и вещественна, откуда вытекает ее нормальность. Для таких матриц существует преобразование Шура, приводящее их к треугольному виду. Важно, что при этом располагаются на диагонали матриц их собственные числа [11]. Справедливость утверждения 2 следует из того, что при выполнении условий леммы выполняется равенство

$$P_c = \sum_{i=1}^{n} P_{ci}.$$

Диагональные члены матриц субграмианов управляемости определяются формулами (2.8), из которых следует справедливость утверждений 1–3. Положительность их суммы следует из условия полной управляемости и наблюдаемости системы MIMO LTI (утверждение 4). Из этого условия следует, что след матрицы Сяо является положительным числом и представляет собой сумму прогрессий, образуемых диагональными членами матриц субграмианов управляемости. Отсюда следует справедливость формулы утверждения 5

$$\operatorname{tr} P_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\dot{N}(s_i) N(-s_i)} \frac{\left(s_i^2\right)^{n-1} - 1}{\left(-s_i^2 - 1\right)} > 0.$$

Заметим, что представления спектральных разложений грамианов в форме Адамара тесно связано с геометрической теорией управления [7]. Матрицы мультипликаторов возникают естественным образом при рассмотрении произведений Адамара и наиболее простые представления этих матриц, как показано выше, появляются при использовании канонических представлений в форме управляемости и наблюдаемости. В первую очередь при описании матриц следует выделить значимые и нулевые элементы. Для тех и других имеет место свойство периодичности структуры, что позволяет отнести эти матрицы к классу псевдоганкелевых матриц. Значимые элементы всегда появляются на месте главных и побочных диагоналей в том случае, когда сумма индексов их строки и столбца является четным числом. В свою очередь нулевые элементы всегда появляются в главных и побочных диагоналях в том случае, когда сумма индексов их строки и столбца является нечетным числом. Матрицы мультипликаторов, состоящих из значимых и нулевых элементов, являются симметричными матрицами. Любая квадратная матрица, в том числе матрица решения уравнения Ляпунова, может быть представлена в сепарабельной форме

$$P = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \mathbf{1}_{ij},$$

где матрица $\mathbf{1}_{ij}$ – матрица мультипликатора, состоящая из нулей, за исключением элемента «ij», равного единице. Преобразование Адамара является структурным преобразованием, что позволяет разделить скалярную и матричную части спектральных разложений грамианов, в которых скалярная часть определяет матрицу мультипликаторов, а матричная часть связана с матрицами разложения резольвенты матрицы динамики в ряд Фаддеева–Леверье и преобразованными матрицами правых частей уравнений Ляпунова. Важным свойством мультипликаторов SISO LTI систем в канонических формах управляемости и наблюдаемости является их положительная определенность, следствием которой является положительность диагональных элементов и следа соответствующих грамианов. Их элементы зависят только от собственных чисел матрицы динамики и ее характеристического многочлена, которые не зависят от преобразований подобия и, следовательно, являются инвариантами при этих преобразованиях. В отличие от матриц мультипликаторов SISO LTI систем, матричная часть спектральных разложений MIMO LTI зависит от преобразований подобия, однако и в этом случае использование инвариантных матриц мультипликаторов позволяет получить замкнутые формулы для вычисления любых элементов матриц грамианов. Из общих формул вычисления грамианов следует, что в этом случае матрица мультипликаторов является общей для грамианов управляемости и наблюдаемости [25]. Заметим, что матрицы мультипликаторов для SISO LTI систем можно вычислять с помощью таблиц Рауса с использованием коэффициентов характеристического уравнения, которые можно вычислить не вычисляя собственные числа матрицы динамики. Преимуществами данного подхода являются возможность получать замкнутые формулы для вычисления прямых и обратных грамианов управляемости для SISO LTI систем и отсутствие необходимости рассматривать спектральные разложения в случае кратных собственных чисел [11]. Диагональные канонические формы отличаются от канонических форм управляемости и наблюдаемости тем, что для первых грамианы и субграмианы являются в общем случае комплексными матрицами, а для вторых – действительными.

5. Спектральные разложения решений дифференциальных уравнений Ляпунова на конечном интервале

Рассмотрим линейную стационарную непрерывную MIMO LTI динамическую систему вида (2.1). Примем, что система (2.1) устойчива, если не оговорено иное, полностью управляема и наблюдаема, все собственные числа матрицы A различны. Рассмотрим наряду с уравнением (2.1) дифференциальное уравнения Ляпунова вида

$$\frac{dP(t)}{dt} = AP\left(t\right) + P\left(t\right)A^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}}, \quad P\left(0\right) = 0_{nxn}, \ t \in \left[0, T\right], \tag{5.1}$$

где BB^{T} – вещественная матрица размера $(n \times n)$.

Построим решение этого уравнения используя операционное исчисление и разложение резольвенты матрицы динамики A в ряд Фаддеева–Леверье. Последние имеют вид [21, 22]

$$(Is - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{n} A_j s^j [N(s)]^{-1}, \quad A_j = \sum_{i=j+1}^{n} a_i A^{i-j+1},$$

$$\left(Is - A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{n} A_j^{\mathrm{T}} s^j [N(s)]^{-1},$$

где A_j, A_j^{T} – матрицы Фаддеева, построенные для резольвент матриц с помощью алгоритма Фаддеева–Леверье; $N\left(s\right)$ – характеристический полином матриц A, A^{T}; a_i – коэффициенты этого полинома.

Первый способ спектральных разложений решений дифференциальных уравнений Сильвестра основан на известной лемме

Л е м м а 3 [24]. *Рассмотрим решение уравнений Ляпунова на конечном полуинтервале* $[0, t) \in [0,\ T]$. *Предположим, что система* (2.1) *устойчива, матрицы* A, BB^{T} *являются вещественными, матрица* A *имеет простой спектр, собственные числа* $s_k, s_{m\rho}$ *различны, не принадлежат мнимой оси плоскости собственных чисел, а также выполнены условия*

$$s_k + s_\rho \neq 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad \rho = \overline{1, n}.$$

Преобразуем систему к диагональному виду

$$\begin{aligned} &x_d = Tx, \quad \dot{x}_d = A_d x_d + B_d u, \quad y_d = C_d x_d, \\ &A_d = TAT^{-1}, \quad B_d = TB, \quad C_d = CT^{-1}, \quad Q_d = TBB^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

или

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1^* \\ \nu_2^* \\ \vdots \\ \nu_n^* \end{bmatrix} = T\Lambda T^{-1},$$

где матрица T *составлена из правых собственных векторов* u_i, *а матрица* T^{-1} *– из левых собственных векторов* ν_i^*, *соответствующих собственному числу* s_i.

Тогда грамиан управляемости диагонализованной линейной части является решением уравнения Ляпунова, которое определится из формулы

$$P_d^c = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} p_{dk,\rho}^c e_k e_\rho^{\mathrm{T}},$$

$$A_d = \operatorname{diag}\left\{\ldots s_k \ldots\right\} = Q_1 A Q_1^{-1},$$

где Q_1 – матрица размеров $n \times n$.

В этом случае решение дифференциального уравнения Ляпунова на конечном полуинтервале $[0,t) \in [0,T]$ имеет вид

$$P_d^c\,(t) = \left[p_{dk,\rho}^c(t)\right],$$

$$p_{dk,\rho}^c\,(t) = \frac{r_{dk,\rho}^c e^{(s_k+\rho)t}}{s_k+s_\rho} + p_{dk,\rho}^c, \quad p_{dk,\rho}^c = -\frac{r_{dk,\rho}^c}{s_k+s_\rho}, \; r_{dk,\rho}^c = e_k Q_1 B B^{\mathrm{T}} (Q_1^{\mathrm{T}}) e_\rho^{\mathrm{T}},$$

$$P^c\,(t) = Q_1^{-1} P_d\,(t)\,(Q_1^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Второй способ решений дифференциальных уравнений Ляпунова основан на использовании преобразования Лапласа для вычисления интеграла Ляпунова и разложение резольвенты матрицы динамики в ряд Фаддеева–Леверье.

Т е о р е м а 2. *Рассмотрим задачу вычисления решений дифференциальных уравнений Ляпунова для MIMO LTI систем* (5.1). *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда справедливы следующие утверждения:*

Случай простого комбинационного спектра матрицы A

1. *Спектральные разложения решений дифференциальных уравнений Ляпунова* (5.1) *в форме произведений Адамара для комбинационного спектра матриц динамики имеют вид*

$$P_{j\eta}(t) = \Omega_{j\eta}(t) \circ \Psi_{j\eta}, \quad \Psi_{j\eta} = A_j B B^{\mathrm{T}} B_\eta, \tag{5.2}$$

$$P_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \frac{s_k^j {s_\rho}^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k - s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_\rho - s_\lambda)} \left[\frac{e^{(s_k+s_\rho)t}-1}{s_k+s_\rho}\right] A_j B B^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}}, \tag{5.3}$$

$$\Omega_{j\eta}\,(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \frac{s_k^j {s_\rho}^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k - s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_\rho - s_\lambda)} \left[\frac{e^{(s_k+s_\rho)t}-1}{s_k+s_\rho}\right] e_j e_\eta^{\mathrm{T}},$$

$$P\,(t) = \Omega\,(t) \circ \Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1} A_j B B^{\mathrm{T}} B_\eta,$$

$$\Omega(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{s_k^j {s_\rho}^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k - s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_\rho - s_\lambda)} \left[\frac{e^{(s_k+s_\rho)t}-1}{s_k+s_\rho}\right] e_j e_\eta^{\mathrm{T}}.$$

2. *Для случая разложения решений дифференциальных уравнений Ляпунова для простого спектра матрицы динамики справедливы те же формулы* (5.2)–(5.3) *с другими матрицами мультипликаторов*

$$P_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k - s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda=\rho}^{n}(-s_\rho - s_\lambda)}\left(e^{s_k t}-1\right)A_j B B^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}} = \tag{5.4}$$

$$= \widetilde{\Omega}_{j\eta}(t)\circ\Psi_{j\eta},$$

$$\widetilde{\Omega}_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k - s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda=\rho}^{n}(-s_\rho - s_\lambda)}\left(e^{s_k t}-1\right)e_j e_\eta^{\mathrm{T}}, \tag{5.5}$$

$$\Psi_{j\eta} = A_j B B^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}},$$

$$P\left(t\right) = \widetilde{\Omega}\left(t\right)\circ\Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1} A_j B B^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}}, \tag{5.6}$$

$$\Omega(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}}(s_k - s_\lambda)\prod_{\lambda=1,\lambda=\rho}^{n}(-s_\rho - s_\lambda)\left(e^{s_k t}-1\right)e_j e_\eta^{\mathrm{T}}. \tag{5.7}$$

3. *Эрмитова компонента спектральных разложений решений уравнений Ляпунова имеет форму*

$$P^H(t) = \frac{1}{2}\left(P(t) + P^*(t)\right), \qquad P_{j\eta}^H(t) = \frac{1}{2}\left(P_{\boldsymbol{j\eta}}(t) + P_{\boldsymbol{j\eta}}^*(t)\right), \tag{5.8}$$

где спектральные разложения матриц $P, P^*, P_{\boldsymbol{j\eta}}, P_{\boldsymbol{j\eta}}^*$ *определяются формулами* (5.2)–(5.7).

Случай кратного спектра матрицы A

4. *Решение дифференциальных уравнений Ляпунова* (5.1) *в форме произведений Адамара для кратного спектра матриц динамики имеют вид*

$$P_{j\eta}(t) = \Omega_{j\eta}(t)\circ\Psi_{j\eta}, \quad \Psi_{j\eta} = A_j B B^{\mathrm{T}} B_\eta, \tag{5.9}$$

$$P_{j\eta}\left(t\right) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1} p_{cj\eta}\left(t\right) A_j B B^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}},$$

$$p_{cj\eta}(t) =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ s^{-1}\sum_{\delta=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{m_\delta} K_{\delta\rho j}\frac{(-1)^{m_\delta-\rho}}{(m_\delta-\rho)!}\left[\frac{d^{m_\delta-\rho}}{ds^{m_\delta-\rho}}\left(\frac{s^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq\delta}^{n}(-s-s_\lambda)^{m_\lambda}}\right)\right]_{s=s-s_\delta}\right\},$$

$$K_{\delta\rho j} = \frac{1}{(\rho-1)!}\left[\frac{d^{\rho-1}}{ds^{\rho-1}}\left(\frac{s^j}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq\delta}^{n}(-s-s_\lambda)^{m_\lambda}}\right)\right]_{s=s_\delta},$$

$$\Omega_{j\eta}(t) = p_{cj\eta}(t)\, e_j e_\eta^{\mathrm{T}},$$

$$P(t) = \Omega(t)\circ\Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1} A_j BB^{\mathrm{T}} B_\eta,$$

(5.10)
$$\Omega(t) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1} p_{cj\eta}(t)\, e_j e_\eta^{\mathrm{T}}.$$

5. *Эрмитова компонента решений уравнений Ляпунова имеет форму* (5.8).

Доказательство. Решением дифференциального уравнения (5.1) является интеграл вида [1, 3, 25]

(5.11)
$$P(t) = \int\limits_o^{\mathrm{T}} e^{A\tau} BB^{\mathrm{T}} e^{A^{\mathrm{T}}\tau} d\tau.$$

Применим к обеим частям уравнения Ляпунова преобразование Лапласа, считая начальные условия нулевыми и используя теорему о преобразовании Лапласа произведения вещественных функций времени, изображение которых представляет собой дробно-рациональную алгебраическую дробь [26]. В рассматриваемом случае эта дробь содержит один нулевой полюс, а все остальные полюса простые. Используя разложение резольвенты в ряд Фаддеева–Леверье и подставив полученные выражения в (5.11), получим изображение разложения решения дифференциальных уравнений Ляпунова (5.1) по комбинационному спектру матриц динамики в форме

$$P(s) = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\frac{-1}{s_k+s_\rho}\frac{s_k^j {s_\rho}^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k-s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_\rho-s_\lambda)} A_j BB^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}} +$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\frac{-1}{s_k+s_\rho}\frac{s_k^j {s_\rho}^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k-s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_\rho-s_\lambda)} A_j BB^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}}\frac{1}{s-s_k-s_\rho}.$$

Выполнив обратное преобразование, получим спектральное разложение решения дифференциальных уравнений Ляпунова (5.1) по комбинационному спектру матриц динамики во временной области в форме произведений Адамара

$$P_{j\eta}(t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{s_k^j{s_\rho}^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k-s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_\rho-s_\lambda)}\left[\frac{e^{(s_k+s_\rho)t}-1}{s_k+s_\rho}\right]A_jBB^{\mathrm{T}}A_\eta^{\mathrm{T}}=$$

$$=\Omega_{j\eta}(t)\circ\Psi_{j\eta},$$

$$\Omega_{j\eta}(t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{s_k^j{s_\rho}^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k-s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_\rho-s_\lambda)}\left[\frac{e^{(s_k+s_\rho)t}-1}{s_k+s_\rho}e_je_\eta^{\mathrm{T}}\right],$$

$$\Psi_{j\eta}=A_jBB^{\mathrm{T}}A_\eta^{\mathrm{T}},$$

$$P(t)=\Omega(t)\circ\Psi,\quad \Psi=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}A_jBB^{\mathrm{T}}A_\eta^{\mathrm{T}},\tag{5.12}$$

$$\Omega(t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\frac{s_k^j{s_\rho}^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k-s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_\rho-s_\lambda)}\left[\frac{e^{(s_k+s_\rho)t}-1}{s_k+s_\rho}\right]e_je_\eta^{\mathrm{T}}.$$

Равенство (5.12) выражает спектральное разложение решений дифференциальных уравнений Ляпунова по комбинационному спектру матрицы. Это доказывает первое утверждение теоремы.

Используя тождество

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{-1}{s_k+s_\rho}\frac{s_k^j{s_\rho}^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k-s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_\rho-s_\lambda)}\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot N(s_k)\,N(-s_k)},\tag{5.13}$$

получим аналогичные разложения по простому спектру матрицы A

$$P_{j\eta}(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k-s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda=\rho}^{n}(-s_\rho-s_\lambda)}(e^{s_kt}-1)A_jBB^{\mathrm{T}}A_\eta^{\mathrm{T}}=$$

$$=\Omega_{j\eta}(t)\circ\Psi_{j\eta},$$

$$\Omega_{j\eta}(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k-s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda=\rho}^{n}(-s_\rho-s_\lambda)}(e^{s_kt}-1)e_je_\eta^{\mathrm{T}},\quad \Psi_{j\eta}=A_jBB^{\mathrm{T}}A_\eta^{\mathrm{T}},$$

$$P(t)=\Omega(t)\circ\Psi,\quad \Psi=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}A_jBB^{\mathrm{T}}A_\eta^{\mathrm{T}},$$

$$\Omega(t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k-s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,\lambda=\rho}^{n}(-s_\rho-s_\lambda)}(e^{s_kt}-1)e_je_\eta^{\mathrm{T}}.$$

Полученные разложения доказывают второе утверждение теоремы. Третье утверждение следует из утверждений 1 и 2.

Для доказательства утверждения 4 заметим прежде всего, что использование спектральных разложений по комбинационному спектру матрицы динамики приводит к громоздким выражениям, чего и не требуют формулировки утверждения 4, которые относятся к спектральным разложениям по кратному спектру матрицы динамики, основанному на спектрах прямой и дуальной антиустойчивой систем.

Сначала покажем, что вычисление интеграла Ляпунова вида (5.7) имеет особенности в случае кратных корней характеристического уравнения матрицы динамики. В силу свойств разложения резольвенты в ряд Фаддеева–Леверье получим выражения

$$(Is - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A_j s^j}{N(s)}, \quad (Is - A^{\mathrm{T}})^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A_j^{\mathrm{T}} s^j}{N(s)}.$$

В соответствии с формулой обратного преобразования Лапласа для дробно-рациональной функции имеем

$$\mathcal{L}^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A_j s^j}{N(s)} = \sum_{\delta=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{m_\delta} K_{\delta\rho j} t^{m_\delta - \rho} e^{s_\delta t},$$

$$K_{\delta\rho j} = \frac{1}{(\rho-1)!} \left[\frac{d^{\rho-1}}{ds^{\rho-1}} \left(\frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} A_j s^j}{\prod\limits_{\lambda=1, \lambda\neq\delta}^{n} (s - s_\lambda)^{m_\lambda}} \right) \right]_{s=s_\delta}.$$

Вычислим изображение интеграла Ляпунова, используя полученные выражения и теорему об изображении произведения двух дробно-рациональных функций времени, когда одно из перемножаемых изображений имеет кратные полюса [26]

$$\mathcal{L}[P_C(t)] = \mathcal{L}\left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} [p_{cj\eta}(t)]\, e_j e_\eta^{\mathrm{T}} \right\} = \tag{5.14}$$

$$= s^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{\delta=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{m_\delta} K_{\delta\rho j} \frac{(-1)^{m_\delta-\rho}}{(m_\delta-\rho)!} \left[\frac{d^{m_\delta-\rho}}{ds^{m_\delta-\rho}} \left(\frac{s^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1, \lambda\neq\delta}^{n} (-s - s_\lambda)^{m_\lambda}} \right) \right]_{s=s-s_\delta} \right\} \times$$
$$\times A_j B B^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}},$$

$$K_{\delta\rho j} = \frac{1}{(\rho-1)!} \left[\frac{d^{\rho-1}}{ds^{\rho-1}} \left(\frac{s^j}{\prod\limits_{\lambda=1, \lambda\neq\delta}^{n} (-s - s_\lambda)^{m_\lambda}} \right) \right]_{s=s_\delta}.$$

Отсюда следуют формулы

$$\Omega_{j\eta}(t) = p_{cj\eta}(t)\, e_j e_\eta^{\mathrm{T}},$$

$$P(t) = \Omega(t) \circ \Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_j B B^{\mathrm{T}} B_\eta,$$

$$\Omega(\mathrm{t}) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} p_{cj\eta}(t)\, e_j e_\eta^{\mathrm{T}}. \tag{5.15}$$

Равенство (5.14) выражает спектральное разложение решений уравнений Ляпунова по кратному спектру матрицы A. Рассмотрим важный частный случай непрерывных линейных стационарных SISO (с одним входом и одним выходом) LTI систем, представленных уравнениями состояния в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В этом случае грамианы управляемости и наблюдаемости в форме Адамара определяются формулами (2.6), (2.7)

$$P_{cj\eta}^F(t) = P_{oj\eta}^F(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n} (s_k - s_\lambda) \prod\limits_{\lambda=1,\lambda=k}^{n} (-s_k - s_\lambda)} (e^{s k t} - 1) e_j e_\eta^{\mathrm{T}},$$

$$\widetilde{\Omega}_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n} (s_k - s_\lambda) \prod\limits_{\lambda=1,\lambda=k}^{n} (-s_k - s_\lambda)} (e^{s k t} - 1), \quad \Psi_{j\eta} = e_j e_\eta^{\mathrm{T}},$$

$$P_c^F(t) = \widetilde{\Omega}(t) \circ \Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} e_j e_\eta^{\mathrm{T}},$$

$$\widetilde{\Omega}(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n} (s_k - s_\lambda) \prod\limits_{\lambda=1,\lambda=k}^{n} (-s_k - s_\lambda)} (e^{s k t} - 1) e_j e_\eta^{\mathrm{T}}.$$

Мультипликатор конечного субграмиана управляемости прямо пропорционален вычету передаточной функции системы, умноженной на значение передаточной функции антиустойчивой системы при подстановке в нее значения корня s_k [27].

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда предел на бесконечности спектральных разложений решений дифференциальных уравнений Ляпунова (2.3) в форме произведений Адамара для кратного спектра матриц динамики имеют вид*

$$P_{j\eta}(\infty) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} p_{cj\eta}(\infty)\, A_j B B^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}}\ ,$$

$$\Omega_{j\eta}(\infty) = p_{cj\eta}(\infty)\, e_j e_\eta^{\mathrm{T}},$$

$$p_{cj\eta}(\infty) = \left\{ \sum_{\delta=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{m_\delta} K_{\delta\rho j} \frac{(-1)^{m_\delta-\rho}}{(m_\delta-\rho)!} \left[\frac{d^{m_\delta-\rho}}{ds^{m_\delta-\rho}} \left(\frac{s^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq\delta}^{n} (-s-s_\lambda)^{m_\lambda}} \right) \right]_{s=-s_\delta} \right\},$$

$$P(\infty) = \Omega(\infty) \circ \Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_j B B^{\mathrm{T}} B_\eta,$$

$$\Omega(\infty) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} p_{cj\eta}(\infty) e_j e_\eta^{\mathrm{T}}.$$

Доказательство. Перейдем к пределу на бесконечности в выражении (5.14). В соответствии с теоремой о конечном значении имеем

$$p_{cj\eta}(\infty) = \left\{ \sum_{\delta=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{m_\delta} K_{\delta\rho j} \frac{(-1)^{m_\delta-\rho}}{(m_\delta-\rho)!} \left[\frac{d^{m_\delta-\rho}}{ds^{m_\delta-\rho}} \left(\frac{s^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq\delta}^{n} (-s-s_\lambda)^{m_\lambda}} \right) \right]_{s=-s_\delta} \right\},$$

$$P_{j\eta}(\infty) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} p_{cj\eta}(\infty) A_j B B^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}},$$

$$\Omega_{j\eta}(\infty) = p_{cj\eta}(\infty) e_j e_\eta^{\mathrm{T}}.$$

Отсюда следуют выражения предела на бесконечности спектральных разложений решений дифференциальных уравнений Ляпунова (3.3) в форме произведений Адамара

$$P(\infty) = \Omega(\infty) \circ \Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_j B B^{\mathrm{T}} B_\eta,$$

$$\Omega(\infty) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} p_{cj\eta}(\infty) e_j e_\eta^{\mathrm{T}}.$$

Получены формулы спектральных разложений решений алгебраических уравнений Ляпунова в форме произведений Адамара для кратных собственных чисел.

Следствие 2. Рассмотрим линейную стационарную непрерывную MIMO LTI динамическую систему вида (2.1). *Примем, что система* (2.1) *устойчива, если не оговорено иное, полностью управляема и наблюдаема, все собственные числа матрицы A различны. Рассмотрим наряду с уравнением* (2.1) *дифференциальное уравнения Ляпунова вида*

$$\frac{dP(t)}{dt} = A^{\mathrm{T}} P(t) + P(t) A + C^{\mathrm{T}} C, \quad P(0) = 0_{n\times n}, \quad t \in [0, T], \tag{5.16}$$

где $C^{\mathrm{T}}C$ *– вещественная матрица размера* $n \times n$.

Тогда спектральное разложение конечного грамиана наблюдаемости в форме произведений Адамара имеет вид формул (5.2)–(5.8), (5.9)–(5.10), *в которых матрица* $A_j BB^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}}$ *заменена на матрицу* $A_j^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} CA_\eta$. *Мультипликаторы конечных грамианов управляемости и наблюдаемости совпадают на полуинтервале* $[0,t) \in [0,\ T]$. *Утверждения 3 и 4 совпадают. Доказательство следствия 2 с учетом сделанной замены совпадает с доказательством следствия 1.*

С л е д с т в и е 3. *Рассмотрим линейную стационарную непрерывную MIMO LTI динамическую систему вида* (2.1). *Пусть выполнены условия леммы 2 и следствия 2 и определены бесконечные грамианы управляемости* P_c *и наблюдаемости* P_o. *Предположим, что спектры сингулярных чисел матриц грамианов* σ_i *простые. Выполним преобразование переменных системы* (2.1) *с матрицами* T_{c2} *и* T_{o2} *вида*

$$x_{cd} = T_{c2} x, \quad x_{od} = T_{o2} x,$$

при которых грамианы приобретают диагональный вид

$$T_{c2} P_c\, T_{c2}^{-1} = P_{cd}, \quad P_{cd} = \mathrm{diag}\left\{ \sigma_{c1} \;\; \sigma_{c2} \;\; \ldots \;\; \sigma_{cn} \right\}, \tag{5.17}$$

$$T_{o2} P_c\, T_{o2}^{-1} = P_{od}, \quad P_{od} = \mathrm{diag}\left\{ \sigma_{o1} \;\; \sigma_{o2} \;\; \ldots \;\; \sigma_{on} \right\}, \tag{5.18}$$

где T_{c2} – *матрица, составленная из правых собственных векторов грамиана* P_c, *а* T_{c2}^{-1} – *матрица, составленная из левых собственных векторов грамиана* P_c, T_{o2} – *матрица, составленная из правых собственных векторов грамиана* P_o, *а* T_{o2}^{-1} – *матрица, составленная из левых собственных векторов грамиана* P_o.

Тогда справедливы следующие спектральные разложения:

$$\begin{gathered}
\mathrm{tr}\, P_{cd} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ci}, \quad \mathrm{tr}\, P_{od} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{oi}, \\
\mathrm{tr}\, P_{cd}^{-1} = \left[p_{c0}^{-1} p_{c1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\dot N_c(\sigma_{ci})} + p_{c0}^{-1} p_{c2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_{ci}}{\dot N_c(\sigma_{ci})} + \ldots \right. \\
\left. \ldots + p_{c0}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_{ci}^{n-1}}{\dot N_c(\sigma_{ci})} \right] > 0, \\
\mathrm{tr}\, P_{od}^{-1} = \left[p_{o0}^{-1} p_{o1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\dot N_o(\sigma_{ci})} + p_{o0}^{-1} p_{o2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_{oi}}{\dot N_o(\sigma_{oi})} + \ldots \right. \\
\left. \ldots + p_{o0}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_{oi}^{n-1}}{\dot N_o(\sigma_{oi})} \right] > 0,
\end{gathered} \tag{5.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем утверждения для случая грамианов управляемости.

Разложение резольвенты грамиана управляемости P_{cd} в ряд Фаддеева–Леверье имеет вид

$$(5.20)\qquad (I\sigma - P_{cd}\ )^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_{cd,n-1}\ \sigma_{ci}^{n-1} + \dots + P_{cd,1}\sigma_{ci} + P_{cd,0}}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})} \frac{1}{\sigma - \sigma_i},$$

в котором P_{cdj} – матрицы Фаддеева для разложения грамиана, вычисляемые с помощью алгоритма Фаддеева–Леверье в виде

$$P_{cdj} = p_{cd,j+1}I + p_{cdj+2}P_{cd}\ + \dots + P_{cd}^{n-j-1},$$

где p_{cdj} – коэффициенты характеристического уравнения матрицы грамиана управляемости P_{cd}. В силу диагональности матриц P_{cd} матрицу P_{cdj} можно записать в виде

$$(5.21)\qquad P_{cdj} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=0}^{n-1} p_{cd,n-j}\sigma_{cd1}^{j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum\limits_{j=0}^{n-1} p_{cd,n-j}\sigma_{cd2}^{j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \sum\limits_{j=0}^{n-1} p_{cd,n-j}\sigma_{cdn}^{j} \end{bmatrix}.$$

Из (3.2) получаем

$$P_{cd}^{-1} = -p_{cd0}^{-1}R_1 = p_{cd0}^{-1}[-p_{cd1}I - p_{cd2}P_{cd} - \dots - P_{cd}^{n-1}].$$

Отсюда следует

$$\operatorname{tr} P_{cd}^{-1} = \left[p_{c0}^{-1}p_{c1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\dot{N}_c\left(\sigma_{ci}\right)} + p_{c0}^{-1}p_{c2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_{ci}}{\dot{N}_c\left(\sigma_{ci}\right)} + \dots + p_{c0}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_{ci}^{n-1}}{\dot{N}_c\left(\sigma_{ci}\right)} \right].$$

Это доказывает первое утверждение следствия. Положительность следа вытекает из положительности сингулярных чисел σ_{ci}. Исходный грамиан управляемости определяется из формулы

$$(5.22)\qquad P_c = T_{c2}^{-1}P_{cd}T_{c2}.$$

Доказательство утверждения для случая грамианов наблюдаемости повторяет утверждения для случая грамианов управляемости.

Рассмотрим непрерывные линейных стационарные SISO (с одним входом и одним выходом) LTI системы, представленных уравнениями состояния в канонических формах управляемости и наблюдаемости. Первый этап преобразования уравнений вида (2.1) в каноническую форму управляемости состоит в преобразовании системы вида (2.1)

$$x = R_c^F x_c,$$
$$\dot{x}_c(t) = A_c^F x_c(t) + b_c^F u(t), \quad x_c(0) = 0, \;\; y_c^F(t) = c_c^F x_c(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$A_c^F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \;\; b_c^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Грамианы управляемости на этом этапе являются матрицами Сяо и имеют вид
$$P_c^F = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} 1_{j+1\eta+1}.$$

Следствие 4. В некоторых случаях необходимо выполнить преобразование полученных уравнений состояния в новую форму, которая преобразует грамианы управляемости в диагональный вид

$$x_d = T_d x_c, \;\; \dot{x}_d = P_{cd} x_d, \;\; P_{cd} = \operatorname{diag}\left\{ \sigma_{c1} \;\; \sigma_{c2} \;\; \ldots \;\; \sigma_{cn} \right\}.$$

Новые переменные связаны с переменными исходной системы уравнением

$$x_d = T_d x_c = T_d (R_c^F)^{-1} x. \tag{5.23}$$

Отсюда следует, что матрица преобразования подобия T на втором этапе равна
$$T = T_d (R_c^F)^{-1}.$$

Очевидно, что грамианы управляемости исходной и преобразованной систем и их обратные грамианы связаны соотношениями

$$P_c = T^{-1} P_{cd} (T^{-1})^{\mathrm{T}} = R_c^F T_{dc}^{-1} P_{cd} (T_{dc}^{-1})^{\mathrm{T}} (R_c^F)^{\mathrm{T}},$$
$$P_c^{-1} = T^{-1} P_{cd}^{-1} (T^{-1})^{\mathrm{T}} = R_c^F T_{dc}^{-1} P_{cd}^{-1} (T_{dc}^{-1})^{\mathrm{T}} (R_c^F)^{\mathrm{T}}.$$

6. Формулы спектральных разложений некоторых энергетических метрик

Утверждение. Рассмотрим MIMO LTI системы (2.1) *в канонической форме управляемости. Предположим, что эти системы устойчивы, матрицы A, B являются вещественными, имеют простой спектр, их собственные числа s_k, s_ρ различны, не принадлежат мнимой оси плоскости собственных чисел и выполнены условия*

$$s_k + s_\rho \neq 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad \rho = \overline{1, n_1}; \quad s_\rho, s_\rho \in spec\ A.$$

Тогда справедливы следующие разложения энергетических метрик грамианов управляемости по спектру матрицы динамики A

$$1.\quad Vol\,\epsilon_x = c_n\sqrt{Det\left[\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\omega\left(n,s_k,j,\eta\ \right)A_jBB^{\mathrm{T}}(A_\eta)^{\mathrm{T}}\right]},$$

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

$$2.\quad Vol\,\epsilon_y = c_n\sqrt{Det\left[\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\omega\left(n,s_k,j,\eta\ \right)CA_jBB^{\mathrm{T}}(A_\eta)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\right]},$$

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

$$3.\quad \mathrm{tr}\ P_c = \ \omega\left(n,s_k,0,0\right)\ \mathrm{tr}\ \left[A_0BB^{\mathrm{T}}(A_0)^{\mathrm{T}}\right]+$$
$$+\,\omega\left(n,s_k,1,1\right)\ \mathrm{tr}\ \left[A_1BB^{\mathrm{T}}(A_1)^{\mathrm{T}}\right]+\dots$$
$$\dots+\omega\left(n,s_k,n-1,n-1\right)\ \mathrm{tr}\ \left[A_{n-1}BB^{\mathrm{T}}(A_{n-1})^{\mathrm{T}}\right].$$

$$4.\quad \mathrm{SISO\ LTI}: \mathrm{tr}\,P_c^F = \omega\left(n,s_k,0,0\right)+\omega\left(n,s_k,1,1\right)+\dots$$
$$\dots+\omega\left(n,s_k,n-1,n-1\right).$$

$$(6.1)\qquad 5.\quad E_{in} = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}P^{-1}cx,$$

$$P_c^{-1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{P_{cd,n-1}\sigma_{ci}^{n-1}+\dots+P_{cd,1}\sigma_{ci}+P_{cd,0}}{\dot N_c(\sigma_{ci})}\,\frac{1}{\sigma_{ci}},$$

$$P_{cdj} = p_{cd,j+1}I+p_{cd,j+2}P_{cd}+\dots+P_{cd}^{n-j-1}.$$

$$(6.2)\qquad 6.\quad E_{out} = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}P_0x,$$

$$\mathrm{MIMO\ LTI}:\ P_0 = \left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot N(s_k)N(-s_k)}1_{j+1\eta+1}\right]\circ\left[\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}A_jBB^{\mathrm{T}}B_\eta\right],$$

$$\mathrm{SISO\ LTI}:\ P_0^F = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot N\left(s_k\right)N\left(-s_k\right)}1_{j+1\eta+1}.$$

7. *Индекс центральности энергетических метрик управляемости непрерывных многосвязных стационарных систем J_{CE}*

$$(6.3)\qquad J_{CE} = \ \mathrm{tr}\,P_c = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\dot N\left(s_i\right)N\left(-s_i\right)}\,\frac{\left(s_i^2\right)^{i-1}-1}{\left(-s_i^2-1\right)}.$$

8. *Средняя минимальная энергия* [19]

$$E_{avmin} = \frac{1}{n}\left[p_{c0}^{-1}p_{c1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})} + p_{c0}^{-1}p_{c2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_{ci}}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})} + \cdots + p_{c0}^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_{ci}^{n-1}}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})}\right].$$

Доказательство утверждения. Разложения 1 и 2 следуют из известных формул для вычисления объема эллипсоида притяжения [6] в которые подставлены выражения спектральных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости. В таком виде формулы позволяют оценивать влияние собственных чисел матрицы динамики на объем эллипсоида притяжения. Утверждение 3 следуют из формул (5.6) и (5.7). Разложение 4 следует из формул (2.6) и (2.7). Справедливость разложения 5 о степени достижимости сети (6.1) следует из [3], формул (5.19) и (5.21) следствия 3. Справедливость разложения 6 следует из [3], формул (5.6) и (5.7) теоремы 2. Индексы центральности энергетических метрик управляемости отдельных мод непрерывных многосвязных стационарных систем $J_{CE,}$, как показано выше, можно определить через след матрицы Сяо. Последний является суммой геометрических прогрессий отдельных мод в соответствии с формулой (4.1) леммы 2. Разложение 8 следует из [19] и формулы (5.19) следствия 3. Заметим, что матрицы Сяо играют главную роль при вычислении большинства энергетических метрик, рассматриваемых выше. Энергетические метрики играют важную роль при анализе устойчивости линейных систем. Формулы (6.2), (6.3) показывают отрицательную синергию взаимодействия слабоустойчивых мод: чем ближе отдельные моды друг другу, тем большая энергия аккумулируется в группе мод, тем ближе система к границе устойчивости. Классический критерий степени устойчивости, основанный на расстоянии от ближайшего корня характеристического уравнения до мнимой оси, не обнаруживает подобной синергии.

7. Заключение

Применение преобразований уравнений состояния в канонические формы управляемости и наблюдаемости позволило упростить формулы спектральных разложений матриц грамианов. В статье в качестве спектров рассматриваются как спектры матрицы динамики системы, так и спектры сингулярных чисел грамианов. В статье получены новые спектральные и структурные разложения конечных грамианов в форме Адамара для решений алгебраических и дифференциальных уравнений Ляпунова линейных стационарных многосвязных систем с многими входами и многими выходами, в том числе и для случая кратных корней характеристического уравнения системы. При этом скалярная часть произведений Адамара зависит от времени, а матричная часть зависит от матриц Фаддеева в разложении резольвенты матрицы динамики и правых частей уравнений Ляпунова. Показано, что скалярная функция мультипликатора является инвариантом при преобразованиях подобия и при этом сильно зависит от разности собственных чисел матрицы динамики и их кратности. Она формирует основные энергетические метрики базового энергетического баланса системы. Матричная часть произведений Адамара формирует весовые коэффициенты в спектральном разложении квадрата H_2-нормы передаточной функции матрицы динамики. Полученные результаты обобщены для класса динамических сетей. В этом случае большую роль играют конечные грамианы, являющиеся решением дифференциальных матричных уравнений Ляпунова. Формулы (2.1)–(2.8) дают ключ к решению оптимизационной задачи (2.3) и добавляют возможность контроля текущих запасов устойчивости. Степень устойчивости сети определяется с помощью энергетической метрики квадрата H_2-нормы передаточной функции матрицы динамики, что дает возможность не только установить факт диссипативности переходных процессов, но и исследовать степень их затухания для слабоустойчивых колебательных систем или систем с кратными корнями характеристического уравнения [26]. Степень управляемости (достижимости) сети связана с минимальной энергией, что позволяет ввести в рассмотрение новые метрики энергоэффективности управления в виде квадратичной формы, образованной ее обратным грамианом управляемости, получаемого с помощью спектральных разложений. Большое внимание уделено инвариантным энергетическим метрикам, образуемым с помощью матриц Сяо. В работе использованы известные энергетические метрики динамических сетей и разработаны методы и алгоритмы их спектральных разложений в качестве дополнительного инструмента для их анализа и оптимизации. Полученные результаты могут быть использованы для проектирования систем модального управления и решения задач оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств в системах управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM. Philadephia, 2005.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
3. *Benner P., Damm T.* Lyapunov equations, Energy Functionals and Model Order Reduction of Bilinear and Stochastic Systems // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49. P. 686–711.
4. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 3–20.
5. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192 с.
6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Теория автоматического управления. Уч. пособие. М.: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
7. *Сачков Ю.Л.* Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах. М.: Физматлит, 2006.
8. *Liu Y., Slotine J., Barabasi A.* Controllability of complex networks // Nature. 2011. V. 473. P. 167–173. https://doi.org/10.1038/nature10011

9. *Xiao C.S., Feng Z.M., Shan X.M.* On the Solution of the Continuous-Time Lyapunov Matrix Equation in Two Canonical Forms // IEE Proc. 1992. V. 139. No. 3. P. 286–290. https://doi.org/10.1049/ip-d.1992.0038

10. *Mehr F.* A Determination of Design of Optimal Actuator Location Based on Control Energy. London/Publisher: City, University of London, 2018.

11. *Hauksdottir A., Sigurdsson S.* The continuous closed form controllability Gramian and its inverse // 2009 American Control Conference Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA June 10–12, 2009. P. 5345–5351. https://doi.org/978-1-4244-4524-0/09

12. *Sreeram V., Agathoklis P.* Solution of Lyapunov equation with system matrix in companion form // IEE Proc. D. Control. Theory Appl. 1991. V. 138. No. 6. P. 529–534. https://doi.org/10.1049/ip-d.1991.0074

13. *Dilip A.S.A.* The controllability Gramian, the Hadamard product and the optimal actuator // Leader Sensor Select. Problem Nature Phys. 2015. V. 11. P. 779–786. https://doi.org/10.1109/LCSYS.2019.2919278

14. *Мироновский Л.А., Соловьева Т.Н.* Анализ и синтез модально-сбалансированных систем // АиТ. 2013. № 4. С. 59–79.

15. *Pasqualetti F., Zampieri S., Bullo F.* Controllability metrics, limitations and algorithms for complex networks // IEEE Transact. Control Network Syst. 2014. V. 1. No. 1. P. 40–52. https://doi.org/10.1109/ACC.2014.6858621

16. *Железнов К.О., Хлебников М.В.* Применение метода инвариантных эллипсоидов для решения линейной задачи слежения// Тр. МФТИ, 2013. Т. 5. № 4. С. 115–121.

17. *Lindmark G., Altafini C.* Minimum energy control for complex networks // Sci. Reports. 2018. V. 8. P. 3188. https://doi.org/10.1038/s41598-018-21398-7

18. *Poolla B.K., Bolognani S., Dorfler F.* Optimal Placement of Virtual Inertia in Power Grids // IEEE Transact. Autom. Control. 2017. V. 62. No. 12. P. 6209–6220. https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2703302

19. *Summers T., Cortesi F., Lygeros J.* On submodularity and controllability in complex dynamical networks // IEEE IEEE Transact. Control Network Syst. 2015. V. 3. No. 1. P. 91–101.

20. *Yadykin I.B.* Spectral Decompositions of Gramians of Continuous Stationary Systems Given by Equations of State in Canonical Forms // Mathematics. 2022. V. 10. No. 13. P. 2339. https://doi.org/10.3390/math10132339

21. *Lindmark G., Altafini C.* Combining centrality measures for control energy reduction in network controllability problems // Proc. 2019 European Control Conference (ECC). 2019. P. 1518–1523.

22. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Изд-во Лань, 2009. 726 с.

23. *Hanson B., Peeters R.* A Faddeev Sequence Method for solving Lyapunov and Sylvester Equations // Linear Algebra Appl. 1996. V. 241–243. P. 401–430.

24. *Галяев А.А., Ядыкин И.Б.* О методах вычисления грамианов и использовании их в анализе линейных динамических систем // АиТ. 2013. № 2. С. 53–74.

25. *Ядыкин И.Б., Галяев И.А.* Спектральные разложения грамианов и энергетических метрик непрерывных неустойчивых систем управления // АиТ. 2023. № 12. С. 18–37.

26. *Iskakov A., Yadykin I.* Lyapunov modal analysis and participation factors applied to small-signal stability of power systems // Automatica. 2021. V. 132. C. Art. No. 109814. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109814

27. *Bahtadze N.N., Chereshko A.A., Elpashev D.V., Yadykin I.B., Sabitov R.A., Smirnova G.S.* Associative Model Predictive Control // IFAC PapersOnLine. Yokohama, Japan: Elsevier, 2023. V. 56. No. 2 P. 7330–7334.

28. *Гарднер М.Ф., Бэрнс Дж.Л.* Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными параметрами. М.: Физматлит, 1961.
Gardner M.F., Barns J.L. Transients in linear systems studied by the Laplace transformation // V. 1. Lumped-constant systems. New York, London. Wiley, Chapman and Hall, 1942.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 31.05.2024

После доработки 15.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024